คณิตศาสตร์ เล่ม 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

AKSORN
Aksorn Charoen Tat ACT.

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 | หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 | หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 | หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 | หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 | หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

Slide PowerPoint_สื่อประกอบการสอน

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด : 142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200
Aksorn CharoenTat ACT.Co.,Ltd : 142 Tanao Rd. Pranakorn Bangkok 10200 Thailand
โทรศัพท์ : 02 622 2999 โทรสาร : 02 622 1311-8 webmaster@aksorn.com / www.aksorn.com

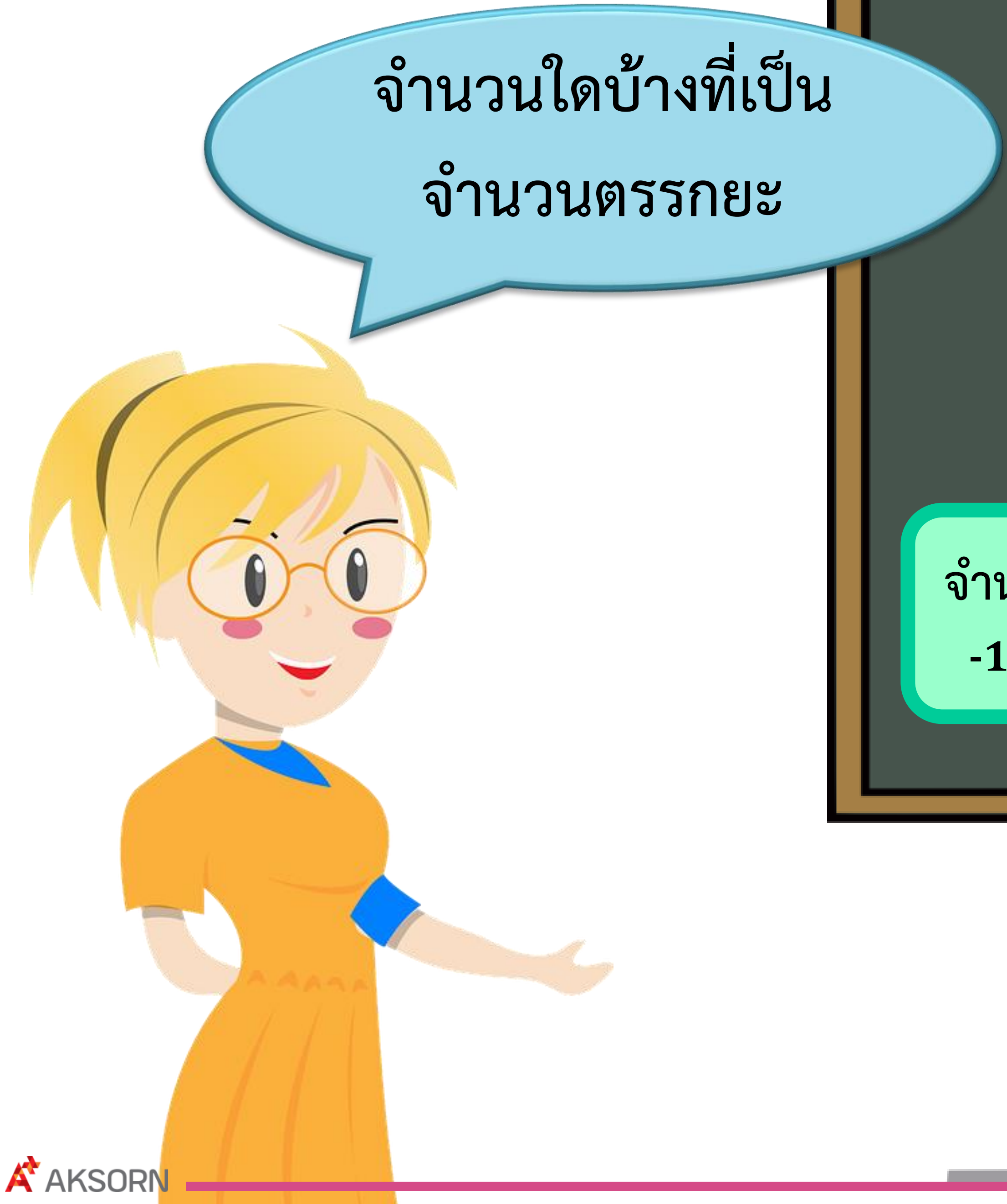
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

จำนวนจริง

ตัวชี้วัด

- เข้าใจจำนวนจริงและความสัมพันธ์ของจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 1.1 ม.2/2)

ควรรู้ก่อนเรียน



- จำนวนตรรกยะ
  - จำนวนเต็ม
    - จำนวนเต็มลบ -1, -2, -3, ...
    - ศูนย์ 0
    - จำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ...
  - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม

ความสัมพันธ์ของเศษส่วนกับทศนิยม

1) การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม

เศษส่วน → หารตัวเศษด้วยตัวส่วน → ผลหารจะอยู่ในรูปทศนิยม

เช่น $\frac{15}{4}$ เขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้ โดยนำ 4 ไปหาร 15 ดังนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.75 \\
\hline
4 & 15.00 \\
 & \underline{12} \\
 & 3\,0 \\
 & \underline{2\,8} \\
 & 20 \\
 & \underline{20} \\
 & \underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\frac{15}{4}$ เขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้ 3.75

ความสัมพันธ์ของเศษส่วนกับทศนิยม

2) การเขียนทศนิยมให้อยู่ในรูปเศษส่วน

$$\frac{\text{เลขโดดเดิมไม่ใส่จุดทศนิยม}}{10^{n}}$$

เมื่อ n คือ จำนวนตำแหน่งของทศนิยมนั้น

เช่น $0.81 = \frac{81}{10^2} = \frac{81}{100}$

ดังนั้น 0.81 เขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ $\frac{81}{100}$

ให้นักเรียนเขียน $\frac{7}{9}$ ให้อยู่ในรูปทศนิยม

$$
\begin{array}{r}
0.777\ldots \\
9\,\overline{)\,7.000} \\
\underline{6\,3} \\
70 \\
\underline{6\,3} \\
70 \\
\underline{6\,3} \\
\underline{\underline{7}}
\end{array}
$$

จะได้ $\frac{7}{9} = 0.777\ldots$

เรียก 0.777... ว่า**ทศนิยมซ้ำ**

(repeating decimal)

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

1. การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

เศษส่วนที่อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ ที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้โดย **นำตัวส่วนไปหารตัวเศษ**

เช่น $\frac{1}{2}$ เขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้โดย**นำ 2 ไปหาร 1**

$$\begin{array}{r|l} & 0.5 \\ \hline 2 & 1.0 \\ & \underline{1\,0} \\ & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

นั่นคือ $\frac{1}{2} = 0.5$

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

1. การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

เช่น $\frac{1}{9}$ เขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้โดย**นำ 9 ไปหาร 1**

$$
\begin{array}{r l}
 & 0.111\ldots \\
9 \big) & 1.0 \\
 & \underline{\ 9\ } \\
 & \ \ 10 \\
 & \ \ \underline{\ 9\ } \\
 & \ \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \underline{\ 9\ } \\
 & \ \ \ \ \ \ 1
\end{array}
$$

จะเห็นว่า ถ้าหารต่อไปเรื่อย ๆ
จะได้ 1 โดยไม่มีที่สิ้นสุด

นั่นคือ $\frac{1}{9} = 0.111\ldots$

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

1. การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

การเขียนทศนิยมซ้ำ สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ . เขียนไว้เหนือเลขโดดที่ซ้ำ ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าเป็นทศนิยมซ้ำ 1 ตำแหน่ง ให้เขียน . ไว้เหนือเลขโดดที่ซ้ำนั้น

เช่น	0.777...	เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์	$\mathbf{0.\dot{7}}$	อ่านว่า	ศูนย์จุดเจ็ด เจ็ดซ้ำ
	-0.3555...	เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์	$\mathbf{-0.3\dot{5}}$	อ่านว่า	ลบศูนย์จุดสามห้า ห้าซ้ำ
	12.999...	เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์	$\mathbf{12.\dot{9}}$	อ่านว่า	สิบสองจุดเก้า เก้าซ้ำ
	7.65444...	เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์	$\mathbf{7.65\dot{4}}$	อ่านว่า	เจ็ดจุดหกห้าสี่ สี่ซ้ำ

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

1. การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

การเขียนทศนิยมซ้ำ สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ . เขียนไว้เหนือเลขโดดที่ซ้ำ ดังนี้

กรณีที่ 2 ถ้าเป็นทศนิยมซ้ำตั้งแต่ 2 ตำแหน่งขึ้นไป ให้เขียน . ไว้เหนือเลขโดดที่ซ้ำตัวแรกและตัวสุดท้าย

เช่น 1.7272... เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $1.\dot{7}\dot{2}$ อ่านว่า หนึ่งจุดเจ็ดสอง เจ็ดสองซ้ำ

0.243243... เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $0.\dot{2}4\dot{3}$ อ่านว่า ศูนย์จุดสองสี่สาม สองสี่สามซ้ำ

-0.42857142857142... เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-0.\dot{4}2857\dot{1}$

อ่านว่า ลบศูนย์จุดสี่สองแปดห้าเจ็ดหนึ่ง สี่สองแปดห้าเจ็ดหนึ่งซ้ำ

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ทศนิยมซ้ำศูนย์

การเขียนทศนิยมในรูปกระจายซึ่งเป็นการแสดงค่าของเลขโดด โดยใช้ค่าประจำหลัก ซึ่งสามารถแสดงค่าประจำหลักของเลขโดดในหลักต่าง ๆ ได้ดังตาราง

ค่าประจำหลัก								
จำนวนเต็ม				ทศนิยม				
...	หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย	หลักส่วนสิบ	หลักส่วนร้อย	หลักส่วนพัน	หลักส่วนหมื่น	...
...	10^2	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	...

จากตาราง สามารถเขียน 153.125 ให้อยู่ในรูปกระจายได้ ดังนี้

$153.125 = (1 \times 10^2) + (5 \times 10) + (3 \times 1) + (1 \times \frac{1}{10}) + (2 \times \frac{1}{10^2}) + (5 \times \frac{1}{10^3})$

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ทศนิยมซ้ำศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

1) 0.7

วิธีทำ $0.7 = 7 \times \frac{1}{10}$

$= \frac{7}{10}$

ดังนั้น $0.7 = \frac{7}{10}$

2) 2.75

วิธีทำ $2.75 = (2 \times 1) + (7 \times \frac{1}{10}) + (5 \times \frac{1}{10^2})$

$= 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$

$= \frac{200}{100} + \frac{70}{100} + \frac{5}{100}$

$= \frac{275}{100}$

$= \frac{11}{4}$

ดังนั้น $2.75 = \frac{11}{4}$ หรือ $2\frac{3}{4}$

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ทศนิยมซ้ำศูนย์

การเขียนทศนิยมซ้ำศูนย์ให้อยู่ในรูปเศษส่วน โดยที่ตัวส่วนเป็นพหุคูณของ 10 สามารถเขียนได้โดย

ตัวเศษเท่ากับเลขโดดเดิมเขียนโดยไม่ใส่จุดทศนิยม และตัวส่วนเท่ากับ 10^n
เมื่อ n คือ จำนวนตำแหน่งของทศนิยมนั้น

ซึ่งทำให้การเขียนทศนิยมซ้ำศูนย์ให้อยู่ในรูปเศษส่วนนั้นทำได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ดังนี้

ทศนิยม	0.6	-0.51	1.831	5.7879	9.32546
เศษส่วน					

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน

กรณีที่ 2 ทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน $0.\dot{5}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $N = 0.\dot{5}$

$= 0.555...$ ..... (1)

คูณทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย 10

$10N = 5.555...$ ..... (2)

จากสมการ (2) และสมการ (1) จะได้

$10N - N = (5.555...) - (0.555...)$

$9N = 5$

$N = \frac{5}{9}$

แต่ $N = 0.\dot{5}$

ดังนั้น $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน $0.\dot{6}\dot{1}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ ให้ $N = 0.\dot{6}\dot{1}$

$= 0.616161\ldots \qquad \ldots\ldots (1)$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย 100

$100N = 61.616161\ldots \qquad \ldots\ldots (2)$

จากสมการ (2) และสมการ (1) จะได้

$100N - N = (61.616161\ldots) - (0.616161\ldots)$

$99N = 61$

$N = \frac{61}{99}$

แต่ $N = 0.\dot{6}\dot{1}$

ดังนั้น $0.\dot{6}\dot{1} = \frac{61}{99}$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียน $0.\dot{5}7\dot{8}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $N = 0.\dot{5}7\dot{8}$

$= 0.578578...$ ..... (1)

คูณทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย 1,000

$1{,}000N = 578.578578...$ ..... (2)

จากสมการ (2) และสมการ (1) จะได้

$$1000N - N = (578.578578...) - (0.578578...)$$

$$999N = 578$$

$$N = \frac{578}{999}$$

แต่ $N = 0.\dot{5}7\dot{8}$

ดังนั้น $0.\dot{5}7\dot{8} = \frac{578}{999}$

AKSORN

จากตัวอย่างที่ 2 ถึงตัวอย่างที่ 4 จะเห็นว่า

$0.\dot{5}$ เขียนในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{5}{9}$

นั่นคือ ทศนิยมซ้ำ **1 ตำแหน่ง**และ**ซ้ำในตำแหน่งที่ 1** เมื่อเขียนในรูปเศษส่วนจะมี**ตัวส่วนเท่ากับ 9** และตัวเศษเท่ากับเลขโดดที่เป็นตัวซ้ำ

$0.\dot{6}\dot{1}$ เขียนในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{61}{99}$

นั่นคือ ทศนิยมซ้ำ **2 ตำแหน่ง**และ**ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1** เมื่อเขียนในรูปเศษส่วนจะมี**ตัวส่วนเท่ากับ 99** และตัวเศษเท่ากับเลขโดดที่เป็นตัวซ้ำ

$0.\dot{5}7\dot{8}$ เขียนในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{578}{999}$

นั่นคือ ทศนิยมซ้ำ **3 ตำแหน่ง**และ**ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1** เมื่อเขียนในรูปเศษส่วนจะมี**ตัวส่วนเท่ากับ 999** และมีตัวเศษเท่ากับเลขโดดที่เป็นตัวซ้ำ

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 2 ทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์

การเขียนทศนิยมซ้ำที่ไม่ได้ซ้ำตั้งแต่ทศนิยมตำแหน่งที่ 1 จะมีวิธีการดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียน $0.3\dot{1}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ ให้ $N = 0.3\dot{1} = 0.3111\ldots$ ..... (1)

(1) x 10 ; $10N = 3.111\ldots$ ..... (2)

(1) x 100 ; $100N = 31.111\ldots$ ..... (3)

(3) – (2) ; $100N - 10N = (31.111\ldots) - (3.111\ldots)$

$90N = 28$

$N = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$

แต่ $N = 0.3\dot{1}$

ดังนั้น $0.3\dot{1} = \frac{14}{45}$

การเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยมซ้ำและการเขียนทศนิยมซ้ำในรูปเศษส่วน

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 2 ทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์

ข้อสังเกตเพิ่มเติม

1. **การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1**

ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 2 $\times 10$ จะได้ ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1

ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 3 $\times$ 100 จะได้ ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1

ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 4 $\times$ 1,000 จะได้ ทศนิยมซ้ำที่ซ้ำตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1

2. **เมื่อต้องการหาผลลบ** ให้แปลงทศนิยมซ้ำหลังจุดให้เป็นทศนิยมซ้ำที่เท่ากัน เช่น $0.3\dot{1}$

แปลงเพื่อหาผลลบเป็น (31.111...) – (3.111...) จะมีผลลบเป็นจำนวนเต็ม คือ 28

2. การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 2 ทศนิยมซ้ำที่ไม่ใช่ทศนิยมซ้ำศูนย์

จากตัวอย่างที่ 5 สามารถเขียน $0.3\dot{1}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้อีกหนึ่งวิธี

จะได้ $0.3\dot{1} = \dfrac{31-3}{90} = \dfrac{28}{90}$

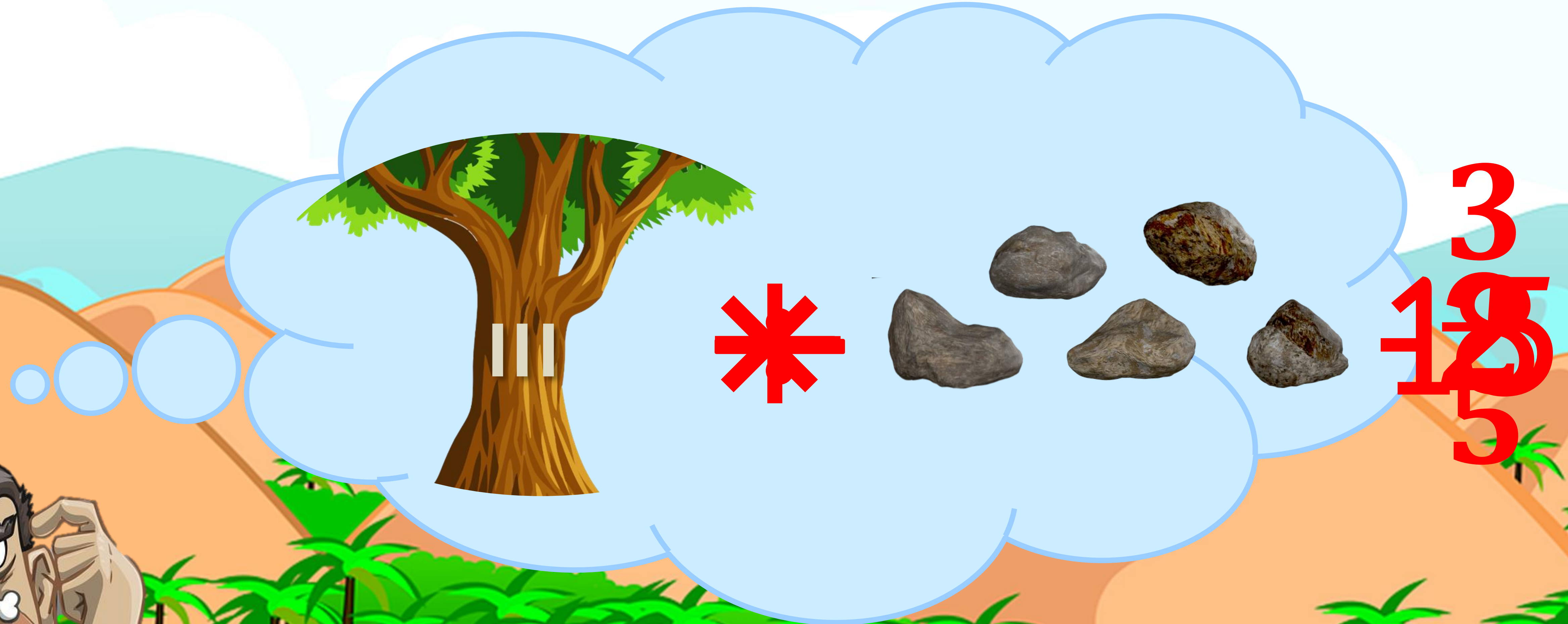
หรือ $0.3\dot{1} = \dfrac{31-3}{90}$

ทศนิยมซ้ำ 1 ตำแหน่ง
ใส่เลข 9 1 ตัว

หลังจุดทศนิยม
มีเลขโดดที่ไม่ซ้ำ 1 ตัว
ใส่เลข 0 1 ตัว

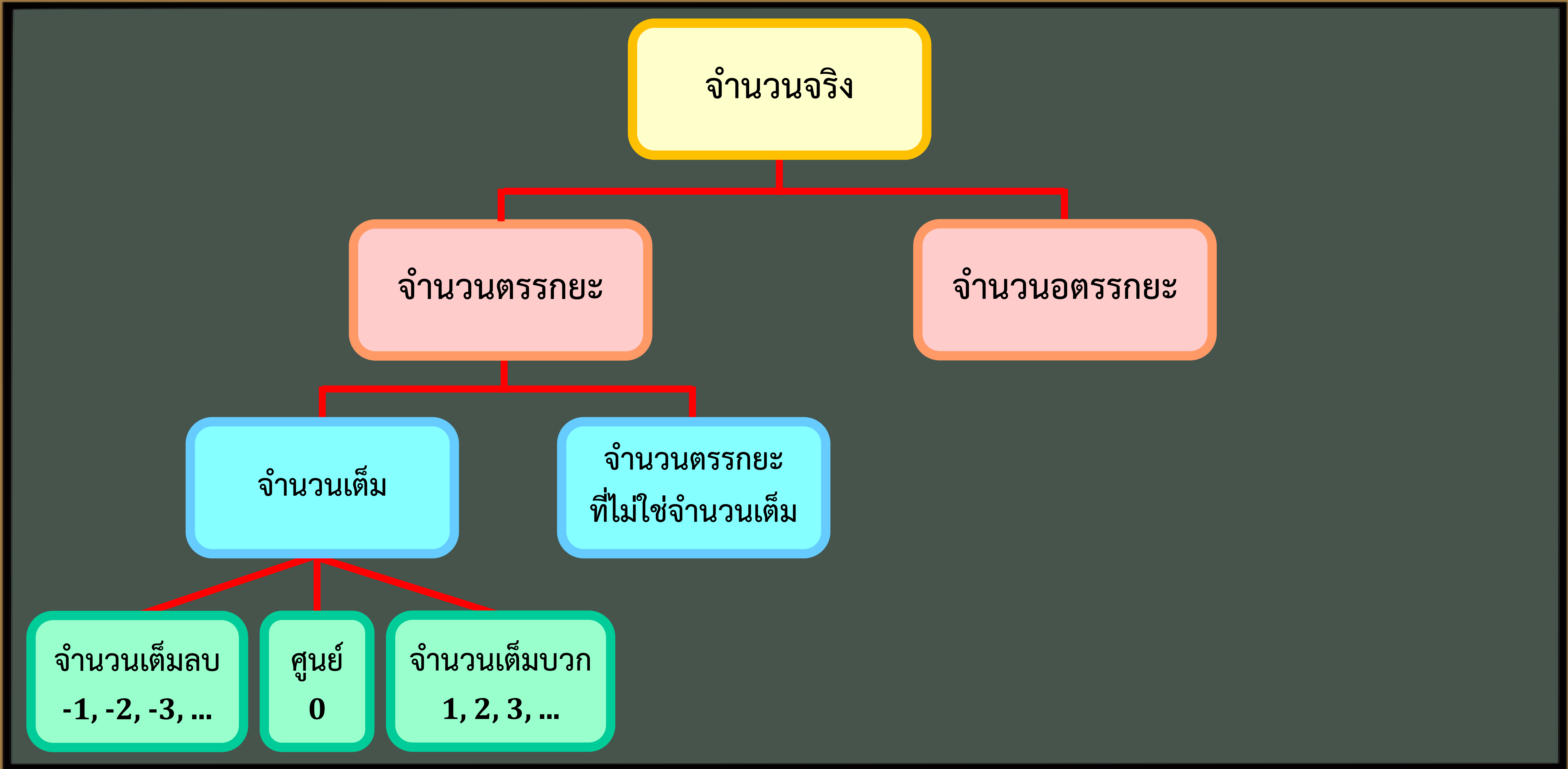
ข้อสังเกต

จำนวนที่นำมาลบ คือ 3
ซึ่งเป็นเลขโดดที่ไม่ซ้ำของ $0.3\dot{1}$



จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **จำนวนตรรกยะ (rational number)**

แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนจริง



จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่เขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ สามารถเขียนจำนวนตรรกยะในรูปทศนิยมได้และเป็นทศนิยมซ้ำ

จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เขียนในรูปทศนิยมได้ แต่ไม่เป็นทศนิยมซ้ำ

สมบัติของจำนวนจริง

1) สมบัติของหนึ่งและศูนย์

สมบัติ

กำหนดให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติการบวกด้วยศูนย์ : $a + 0 = 0 + a = a$

สมบัติการคูณด้วยศูนย์ : $a \times 0 = 0 \times a = 0$

สมบัติการหารศูนย์ด้วยจำนวนจริงใด ๆ : $0 \div a = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

สมบัติการคูณด้วยหนึ่ง : $a \times 1 = 1 \times a = a$

สมบัติการหารด้วยหนึ่ง : $a \div 1 = a$

2) สมบัติการสลับที่

สมบัติ

กำหนดให้ a และ b แทนจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก : $a + b = b + a$

สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ : $a \times b = b \times a$

สมบัติของจำนวนจริง

3) สมบัติการเปลี่ยนหมู่

สมบัติ

กำหนดให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวก : $(a + b) + c = a + (b + c)$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณ : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

4) สมบัติการแจกแจง

สมบัติ

กำหนดให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

และ

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

สมบัติของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\left(-\frac{11}{25}\right) - 5.3 + \frac{3}{25}$

2) $\frac{2}{5} \times 12.4$

2) $\frac{2}{5} \times 12.4$

<u>วิธีทำ</u> $\frac{2}{5} \times 12.4 = \frac{2}{5} \times (10 + 2.4)$

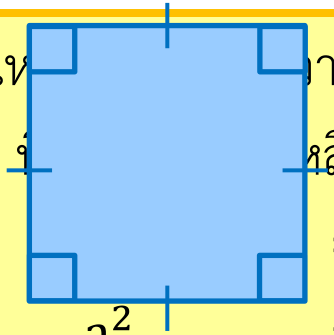
$= \left(\frac{2}{5} \times 10\right) + \left(\frac{2}{5} \times 2.4\right)$ (สมบัติการแจกแจง)

$= 4 + 0.96$

$= 4.96$

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 49 ตารางหน่วย รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้มีความยาวของแต่ละด้านเท่ากับกี่หน่วย



ให้ รูปสี่เห ... ามยาวด้านละ a หน่วย

จากสูตร ... หลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ ความยาวด้าน × ความยาวด้าน

จะได้ = 49

หรือ $a^2 = 49$

การหาค่าของ a จากสมการ $a^2 = 49$ คือ การหาจำนวนซึ่งยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 49

เรียกจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 49 ว่าเป็นรากที่สองของ 49

เนื่องจาก $7^2 = 49$ และ $(-7)^2 = 49$

ดังนั้น 7 และ -7 เป็นรากที่สองของ 49

แต่ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะต้องไม่เป็นจำนวนลบ

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้มีความยาวด้านละ 7 หน่วย

วิธีเขียนรากที่สองที่เป็นบวกของ 49 อีกวิธีหนึ่ง สามารถเขียนโดยใช้เครื่องหมายกรณฑ์ ($\sqrt{}$)

เช่น รากที่สองที่เป็นบวกของ 49 เขียนแทนด้วย $\sqrt{49}$ นั่นคือ 7

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

จากบทนิยาม จะได้ว่า

1. ถ้า a เป็นจำนวนบวกใด ๆ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ a

   ใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นบวกของ a

   ใช้สัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นลบของ a

   จากบทนิยามที่ว่ารากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ a

   ทำให้สรุปได้ว่า $(\sqrt{a})^2 = a$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$

2. ถ้า $a = 0$ รากที่สองของ a เท่ากับ 0 ทั้งนี้เพราะ $0^2 = 0$

3. ถ้า a เป็นจำนวนลบใด ๆ จะหารากที่สองของ a ไม่ได้ ทั้งนี้เพราะไม่มีจำนวนจริงใด ๆ ที่ยกกำลังสองแล้วจะได้จำนวนลบ

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 7 จงหารากที่สองของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) 4 2) 6

2) 6

<u>วิธีทำ</u> รากที่สองของ 6 คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 6

จะได้ รากที่สองที่เป็นบวกของ 6 คือ $\sqrt{6}$

และ รากที่สองที่เป็นลบของ 6 คือ $-\sqrt{6}$

ดังนั้น รากที่สองของ 6 คือ $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$

รากที่สองของจำนวนบวกใด ๆ จะเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะก็ได้

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 8 จงหาว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นรากที่สองของจำนวนใด

1) $-\frac{1}{2}$

2) 0.5

3) $-\sqrt{8.3}$

1) $-\frac{1}{2}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ดังนั้น $-\frac{1}{2}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{1}{4}$

2) 0.5

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $0.5^2 = 0.25$

ดังนั้น 0.5 เป็นรากที่สองของ 0.25

3) $-\sqrt{8.3}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\left(-\sqrt{8.3}\right)^2 = 8.3$

ดังนั้น $-\sqrt{8.3}$ เป็นรากที่สองของ 8.3

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 9 จงหารากที่สองที่เป็นบวกของ 3^2 และ $(-3)^2$

วิธีทำ รากที่สองที่เป็นบวกของ 3^2 เท่ากับ 3

แต่รากที่สองที่เป็นบวกของ 3^2 เขียนแทนด้วย $\sqrt{3^2}$

ดังนั้น $\sqrt{3^2} = 3$

รากที่สองที่เป็นบวกของ $(-3)^2$ เท่ากับ 3

แต่รากที่สองที่เป็นบวกของ $(-3)^2$ เขียนแทนด้วย $\sqrt{(-3)^2}$

ดังนั้น $\sqrt{(-3)^2} = 3$

นั่นคือ รากที่สองที่เป็นบวกของ 3^2 และ $(-3)^2$ เท่ากับ 3

รากที่สองและการหารากที่สองของจำนวนจริง

จากตัวอย่างที่ 9 จะเห็นว่า

$$\sqrt{3^2} = 3 = |3|$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$$

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

เมื่อ $|a|$ คือ ค่าสัมบูรณ์ของ a

การหารากที่สอง

1) การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 10 จงหารากที่สองของ 225

วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
225 &= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\
&= (5 \times 3) \times (5 \times 3) \\
&= 15 \times 15 \\
&= 15^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3 & 225 \\ \hline
3 & 75 \\ \hline
5 & 25 \\ \hline
5 & 5 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

จะได้ 15 เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ 225

แต่เนื่องจาก $(-15)^2 = 225$

จะได้ -15 เป็นรากที่สองที่เป็นลบของ 225

ดังนั้น รากที่สองของ 225 คือ 15, -15

การหารากที่สอง

1) การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 11 จงหารากที่สองที่เป็นบวกของ $36x^4y^8$ เมื่อ x และ y แทนจำนวนจริงใด ๆ

วิธีทำ เนื่องจาก $36x^4y^8 = (6 \cdot 6)(x^2 \cdot x^2)(y^4 \cdot y^4)$

$= (6x^2y^4)^2$

ดังนั้น $\sqrt{36x^4y^8} = \sqrt{(6x^2y^4)^2}$

$= |6x^2y^4|$

$= 6x^2y^4$

1) การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลลัพธ์ของ $-\sqrt{441}+\sqrt{961}-\sqrt{12.25}$

<u>วิธีทำ</u>

$$-\sqrt{441}+\sqrt{961}-\sqrt{12.25} = -\sqrt{21^2}+\sqrt{31^2}-\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$= -21+31-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$= -21+31-\frac{7}{2}$$

$$= -21+31-3.5$$

$$= 6.5$$

ดังนั้น $-\sqrt{441}+\sqrt{961}-\sqrt{12.25} = 6.5$

การหารากที่สอง

2) การหารากที่สองโดยการประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 13 จงหารากที่สองของ 50 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 1 หาจำนวนเต็มบวกสองจำนวนเรียงกัน ซึ่งกำลังสองของจำนวนทั้งสองต้องมีค่าใกล้เคียง 50 มากที่สุด โดยที่ค่าหนึ่งน้อยกว่า 50 และอีกค่าหนึ่งมากกว่า 50**

เนื่องจาก $7 \times 7 = 49$ และ $8 \times 8 = 64$

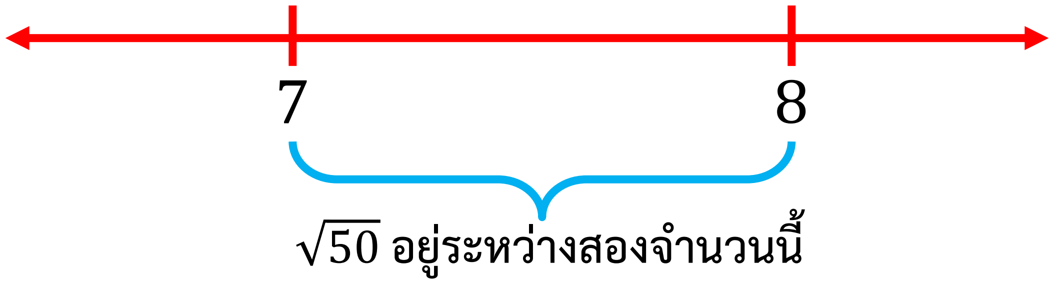
จะได้ $49 < 50 < 64$ นั่นคือ $7^2 < 50 < 8^2$

จาก $\sqrt{49} = 7$ และ $\sqrt{64} = 8$

แสดงว่า $\sqrt{50}$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\sqrt{49}$ และ $\sqrt{64}$

นั่นคือ $\sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{64}$ หรือ $7 < \sqrt{50} < 8$

ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 50 มีค่าระหว่างจำนวนเต็ม 7 และ 8



ตัวอย่างที่ 13 จงหารากที่สองของ 50 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

วิธีทำ **ขั้นที่ 2 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 1**

ค่าเฉลี่ยของ 7 กับ 8 เท่ากับ $\frac{7+8}{2} = 7.5$

เนื่องจาก $7.5^2 = 56.25$ มากกว่า 50

ดังนั้น $7 < \sqrt{50} < 7.5$

ขั้นที่ 3 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 2

ค่าเฉลี่ยของ 7 กับ 7.5 เท่ากับ $\frac{7+7.5}{2} = 7.25$

เนื่องจาก $7.25^2 = 52.5625$ มากกว่า 50

ดังนั้น $7 < \sqrt{50} < 7.25$

ขั้นที่ 4 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 3

ค่าเฉลี่ยของ 7 กับ 7.25 เท่ากับ $\frac{7+7.25}{2} = 7.125$

เนื่องจาก $7.125^2 \approx 50.7656$ มากกว่า 50

ดังนั้น $7 < \sqrt{50} < 7.125$

ตัวอย่างที่ 13 จงหารากที่สองของ 50 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 5 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 4**

ค่าเฉลี่ยของ 7 กับ 7.125 เท่ากับ $\frac{7 + 7.125}{2} = 7.0625$

เนื่องจาก $7.0625^2 \approx 49.8789$ น้อยกว่า 50

ดังนั้น $7.0625 < \sqrt{50} < 7.125$

ขั้นที่ 6 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 5

ค่าเฉลี่ยของ 7.0625 กับ 7.125 เท่ากับ $\frac{7.0625 + 7.125}{2} = 7.09375$

เนื่องจาก $7.09375^2 \approx 50.3213$ มากกว่า 50

ดังนั้น $7.0625 < \sqrt{50} < 7.09375$

ขั้นที่ 7 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 6

ค่าเฉลี่ยของ 7.0625 กับ 7.09375 เท่ากับ $\frac{7.0625 + 7.09375}{2} \approx 7.0781$

เนื่องจาก $7.0781^2 \approx 50.0995$ มากกว่า 50

ดังนั้น $7.0625 < \sqrt{50} < 7.0781$

ตัวอย่างที่ 13 จงหารากที่สองของ 50 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

วิธีทำ **ขั้นที่ 8 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 7**

ค่าเฉลี่ยของ 7.0625 กับ 7.0781 เท่ากับ $\frac{7.0625 + 7.0781}{2} = 7.0703$

เนื่องจาก $7.0703^2 \approx 49.9891$ น้อยกว่า 50

ดังนั้น $7.0703 < \sqrt{50} < 7.0781$

ขั้นที่ 9 หาค่าเฉลี่ยของจำนวนที่ได้จากขั้นที่ 8

ค่าเฉลี่ยของ 7.0703 กับ 7.0781 เท่ากับ $\frac{7.0703+7.0781}{2} = 7.0742$

เนื่องจาก $7.0742^2 \approx 50.0443$

นั่นคือ รากที่สองของ 50 มีค่าประมาณ 7.0742 กับ -7.0742

3) การหารากที่สองโดยการเปิดตาราง

ตัวอย่างตารางแสดงค่ารากที่สอง

n	$\sqrt{n}$
⋮	⋮
12	3.464
13	3.606
14	3.742
15	3.873
16	4.000
⋮	⋮

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\sqrt{n}$ คือรากที่สองที่เป็นบวกของ n

ถ้า n ไม่เป็นจำนวนเต็ม ค่าในตารางจะเป็นค่าโดยประมาณ

เช่น $n = 15$ จะได้ว่า $\sqrt{n} \approx 3.875$
แต่รากที่สองของ n คือ $\sqrt{n}$ และ $-\sqrt{n}$
นั่นคือ รากที่สองของ 15 มีค่าประมาณ 3.875 และ -3.875

3) การหารากที่สองโดยการเปิดตาราง

ตัวอย่างที่ 14 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้ โดยการเปิดตาราง

1) 625

2) 20.25

วิธีทำ จากตาราง

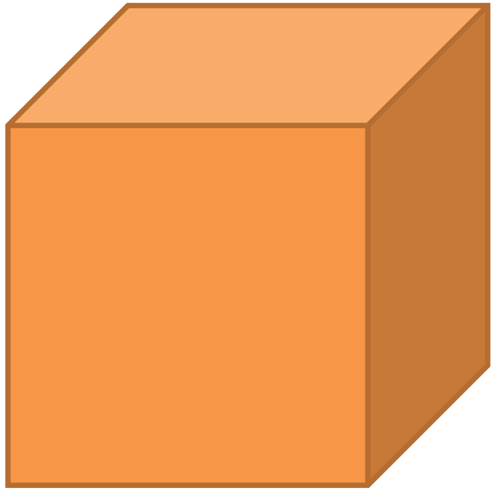
1) รากที่สองของ 625 คือ 25 และ -25

2) เนื่องจาก รากที่สองของ 2,025 คือ 45 และ -45

จะได้ $4.5 \times 4.5 = 20.25$ และ $(-4.5) \times (-4.5) = 20.25$

ดังนั้น รากที่สองของ 20.25 คือ 4.5 และ -4.5

รากที่สามและการหารากที่สามของจำนวนจริง



ปริมาตรของลูกบาศก์ = $(\text{ความยาวด้าน})^3$

เช่น ลูกบาศก์มีความยาวด้านละ 3 หน่วย

จะมีปริมาตรเท่ากับ $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$= 27$ ลูกบาศก์หน่วย

จะเห็นว่า เมื่อนำ 3 มายกกำลัง 3 จะเท่ากับ 27

และ $(-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

$= -27$

เรียก -3 ว่าเป็นรากที่ 3 ของ -27

รากที่สามและการหารากที่สามของจำนวนจริง

จำนวนที่เป็นกำลังสามสมบูรณ์ (perfect cube) คือ จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มที่เท่ากันสามจำนวนได้

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ รากที่สามของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

สัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$ อ่านว่า รากที่สามของ a

จากบทนิยาม จะได้ $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

ดังนั้น การหารากที่สามของ a คือ การหาจำนวนซึ่งเมื่อนำมายกกำลังสามแล้วต้องเท่ากับ a

การหารากที่สาม

1) การหารากที่สามโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 16 จงหารากที่สามของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) -125

2) $\frac{343}{64}$

3) -0.216

3) -0.216

วิธีทำ เนื่องจาก -0.216 = (-0.6) × (-0.6) × (-0.6)

= $(-0.6)^3$

ดังนั้น รากที่สามของ -0.216 คือ $(-0.6)^3$

= $\left(\frac{7}{4}\right)^3$

ดังนั้น รากที่สามของ $\frac{343}{64}$ คือ $\frac{7}{4}$

การหารากที่สาม

1) การหารากที่สามโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่าของ $\sqrt[3]{27a^3b^3}$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริงใด ๆ

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $27a^3b^3 = (3 \times 3 \times 3) \times (a \times a \times a) \times (b \times b \times b)$

$= (3ab)(3ab)(3ab)$

$= (3ab)^3$

นั่นคือ รากที่สามของ $27a^3b^3 = 3ab$

ดังนั้น $\sqrt[3]{27a^3b^3} = 3ab$

การหารากที่สาม

2) การหารากที่สามโดยการประมาณค่า

ขั้นที่ 1 หาจำนวนเต็มสองจำนวนเรียงกัน ซึ่งจำนวนที่ต้องการหารากที่สามต้องอยู่ระหว่างกำลังสามของทั้งสองจำนวนทั้งสอง

ขั้นที่ 2 นำค่าเฉลี่ยของจำนวนเต็ม 2 จำนวนนั้นมายกกำลังสาม เปรียบเทียบกับจำนวนที่ต้องการหารากที่สาม

ถ้ามากกว่า ให้นำค่าเฉลี่ยกับจำนวนที่น้อยกว่ามาหาค่าเฉลี่ย แล้วนำไปหากำลังสาม

ถ้าน้อยกว่า ให้นำค่าเฉลี่ยกับจำนวนที่มากกว่ามาหาค่าเฉลี่ย แล้วนำไปยกกำลังสาม

ขั้นที่ 3 ทำขั้นที่ 2 ซ้ำอีกจนได้จำนวนใกล้เคียงจำนวนที่ต้องการ

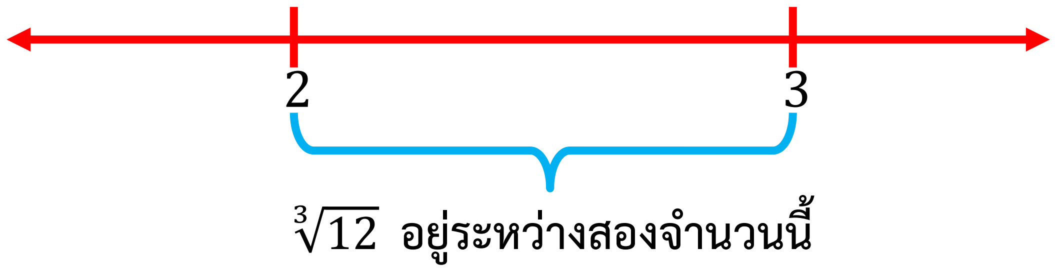
การหารากที่สาม

2) การหารากที่สามโดยการประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 18 จงหารากที่สามของ 12 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 1** เนื่องจาก $2^3 = 8$ และ $3^3 = 27$

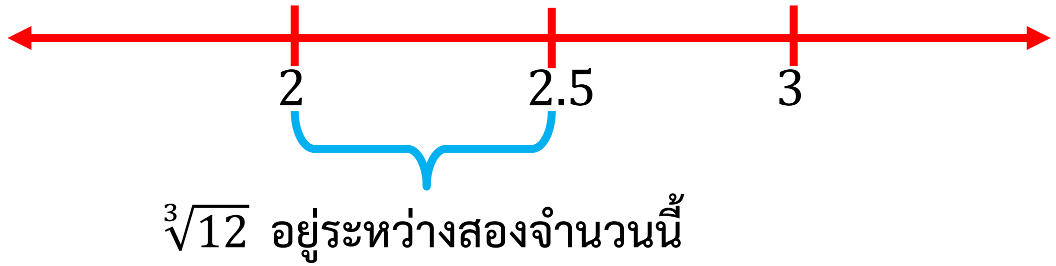
ดังนั้น $2 < \sqrt[3]{12} < 3$



ขั้นที่ 2 ค่าเฉลี่ยของ 2 กับ 3 = $\dfrac{2+3}{2} = 2.5$

เนื่องจาก $(2.5)^3 = 15.625$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 12

ดังนั้น $2 < \sqrt[3]{12} < 2.5$



การหารากที่สาม

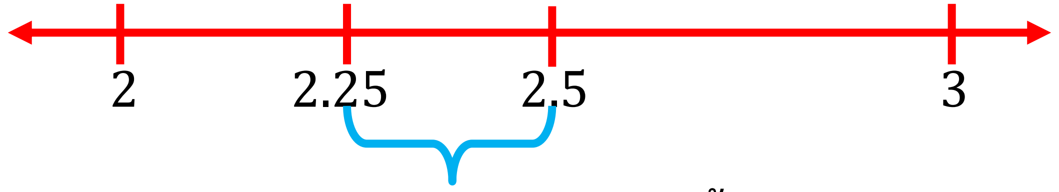
2) การหารากที่สามโดยการประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 18 จงหารากที่สามของ 12 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 3** ค่าเฉลี่ยของ 2 กับ 2.5 = $\frac{2 + 2.5}{2} = 2.25$

เนื่องจาก $(2.25)^3 \approx 11.39$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 12

ดังนั้น $2.25 < \sqrt[3]{12} < 2.5$

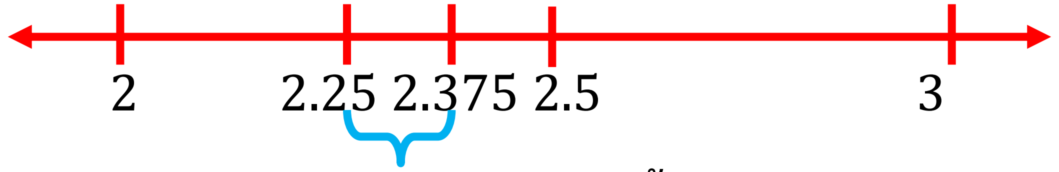


$\sqrt[3]{12}$ **อยู่ระหว่างสองจำนวนนี้**

ขั้นที่ 4 ค่าเฉลี่ยของ 2.25 กับ 2.5 = $\frac{2.25 + 2.5}{2} = 2.375$

เนื่องจาก $(2.375)^3 \approx 13.40$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 12

ดังนั้น $2.25 < \sqrt[3]{12} < 2.375$



$\sqrt[3]{12}$ **อยู่ระหว่างสองจำนวนนี้**

2) การหารากที่สามโดยการประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 18 จงหารากที่สามของ 12 โดยการประมาณค่าให้ใกล้เคียงทศนิยมสามตำแหน่ง

วิธีทำ **ขั้นที่ 5** ค่าเฉลี่ยของ 2.25 กับ 2.375 = $\frac{2.5 + 2.375}{2} = 2.3125$

เนื่องจาก $(2.3125)^3 \approx 12.366$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 12

ดังนั้น $2.25 < \sqrt[3]{12} < 2.3125$

ขั้นที่ 6 ค่าเฉลี่ยของ 2.25 กับ 2.3125 = $\frac{2.25 + 2.3125}{2} = 2.28125$

เนื่องจาก $(2.28125)^3 \approx 11.872$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 12

ดังนั้น $2.28125 < \sqrt[3]{12} < 2.3125$

ขั้นที่ 7 ค่าเฉลี่ยของ 2.28125 กับ 2.3125 = $\frac{2.28125 + 2.3125}{2} \approx 2.2969$

เนื่องจาก $(2.2969)^3 \approx 12.117$

ดังนั้น รากที่สามของ 12 มีค่าประมาณ 2.297

การหารากที่สาม

3) การหารากที่สามโดยการเปิดตาราง

ตัวอย่างตารางแสดงค่ารากที่สาม

n	$\sqrt[3]{n}$
$\vdots$	$\vdots$
90	4.481
91	4.498
92	4.514
93	4.531
$\vdots$	$\vdots$

เมื่อ $\sqrt[3]{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ค่าในช่อง $\sqrt[3]{n}$ จะเป็นค่าประมาณ

เช่น $n = 90$ จะได้ว่า $\sqrt[3]{n} \approx 4.481$

นั่นคือ $\sqrt[3]{90} \approx 4.481$

3) การหารากที่สามโดยการเปิดตาราง

ตัวอย่างที่ 19 จงหารากที่สามของจำนวนต่อไปนี้ โดยการเปิดตาราง

1) -55

2) 99

1) -55

วิธีทำ จาก $n = 55$

จะได้ $\sqrt[3]{n} \approx 3.803$

ดังนั้น รากที่สามของ -55 ≈ -3.803

2) 99

วิธีทำ จาก $n = 99$

จะได้ $\sqrt[3]{n} \approx 4.626$

ดังนั้น รากที่สามของ 99 ≈ 4.626

ตัวอย่างที่ 20 จงตรวจสอบว่า -5 เป็นรากที่สามของ 125 หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5)$

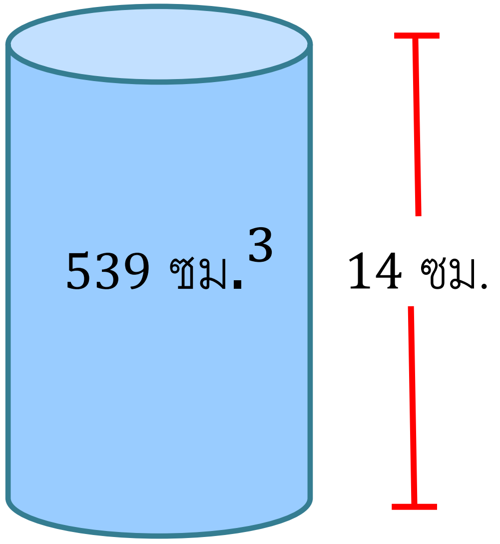
$= -125$

ดังนั้น5 ไม่เป็นรากที่สามของ 125

การนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงไปใช้ในชีวิตจริง

โจทย์ปัญหาบางอย่าง จะต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงมาประยุกต์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 21 แก้วทรงกระบอกใบหนึ่งมีความจุประมาณ 539 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีความสูง 14 เซนติเมตร จงหาว่าแก้วใบนี้มีรัศมีกี่เซนติเมตร (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)



<u>วิธีทำ</u> จากสูตรปริมาตรทรงกระบอกเท่ากับ $\pi r^2 h$

จะได้

$$\begin{aligned}
539 &= \pi \times r^2 \times 14 \\
r^2 &\approx \frac{539}{14\times\frac{22}{7}} \\
&= 12.25 \\
&= (3.5)^2 \\
r &\approx \sqrt{(3.5)^2},\ -\sqrt{(3.5)^2} \\
&= 3.5,\ -3.5
\end{aligned}$$

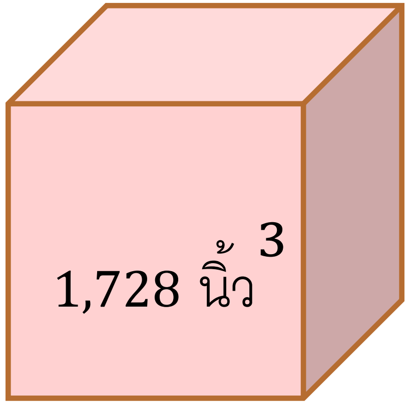
เนื่องจาก r เป็นความยาวรัศมี จึงใช้เฉพาะจำนวนบวก

ดังนั้น แก้วใบนี้มีรัศมียาวประมาณ 3.5 เซนติเมตร

การนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงไปใช้ในชีวิตจริง

ความรู้เรื่องจำนวนจริง
สามารถนำมาประยุกต์ใช้ใน
การหาคำตอบโจทย์ปัญหาได้

ตัวอย่างที่ 22 กล่องทรงลูกบาศก์มีความจุ 1,728 ลูกบาศก์นิ้ว จะสามารถบรรจุลูกบาลที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 15 นิ้ว ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด



<u>วิธีทำ</u> กล่องมีความจุ 1,728 ลูกบาศก์นิ้ว

จะได้ว่า กล่องใบนี้ยาวด้านละ $\sqrt[3]{1{,}728} = 12$ นิ้ว

ดังนั้น จะไม่สามารถใช้บรรจุลูกบอลที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 15 นิ้วได้

เพราะลูกบอลมีขนาดใหญ่กว่ากล่องใบนี้